Eins zu Eins – Kurzfassung eines Vortrages im Arbeitskreis Geometrie

Hans Walser

Es werden exemplarisch geometrische Beispiele aus der Ausbildung Studierender in Geomatik, Kartografie, Vermessungswesen und Geografie vorgestellt. Viele Beispiele mit räumlichen und sphärischen Überlegungen sind für den Schulunterricht geeignet.

1 Längen oder Winkel?

Sind *geografische Länge* und *geografische Breite* eigentlich Längen oder Winkel?

Werden sie als geometrische Längen in einem kartesischen Koordinatensystem abgetragen, ergibt sich die so genannte *Plattkarte* (Abb. 1).

In der Parameterdarstellung

$$\left.\begin{aligned} x(\phi,\lambda) &= \cos(\phi)\cos(\lambda)\\ y(\phi,\lambda) &= \cos(\phi)\sin(\lambda)\\ z(\phi,\lambda) &= \sin(\phi)\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\phi \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}],\\ &\lambda \in [-\pi,\pi]\end{aligned}$$

erscheinen geografische Länge λ und geografische Breite ϕ hingegen als Winkel.

Der Parameterbereich $\phi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \lambda \in [-\pi,\pi]$ entspricht der Plattkarte (Abb. 2).

Für Mathematiker geht der Gedankengang von links nach rechts, vom Parameterbereich zur Kugelfläche. Kartografen arbeiten von rechts nach links, von der Realität zur Karte. Jede Parametrisierung der Kugel liefert eine Karte, wenn der Parameterbereich mit Geoinformation gefüllt wird.

2 Plattkarte im Hochformat?

Frage eines Studierenden: Können wir in der Parameterdarstellung die Ausmaße des Parameterrechteckes vertauschen? Wir arbeiten dann mit der Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} x(\phi,\lambda) &= \cos(\phi)\cos(\lambda)\\ y(\phi,\lambda) &= \cos(\phi)\sin(\lambda)\\ z(\phi,\lambda) &= \sin(\phi)\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\phi \in [-\pi,\pi],\\ &\lambda \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}],\end{aligned}$$

Das Parameterrechteck ist jetzt im Hochformat statt im Querformat. Die Rückseite (eurozentrisch gesehen) der Erdkugel, den Pazifik also, erreichen wir nicht mehr durch geografische Längen über 90°W oder 90°E hinaus, sondern indem wir die

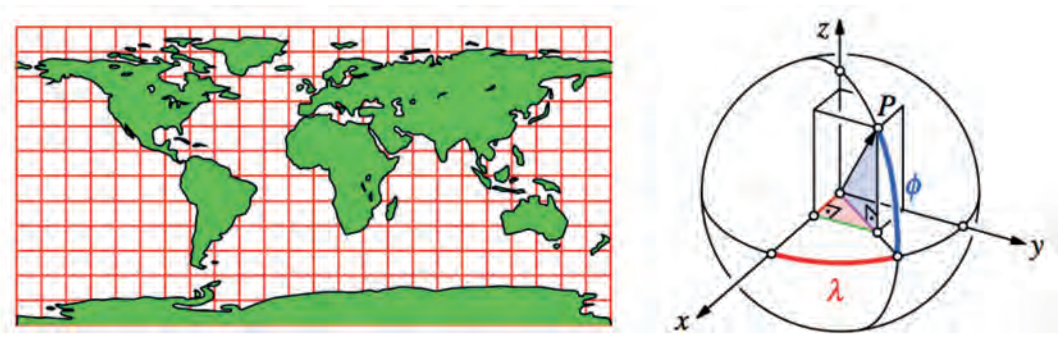


Abbildung 1. Plattkarte. Parameterdarstellung

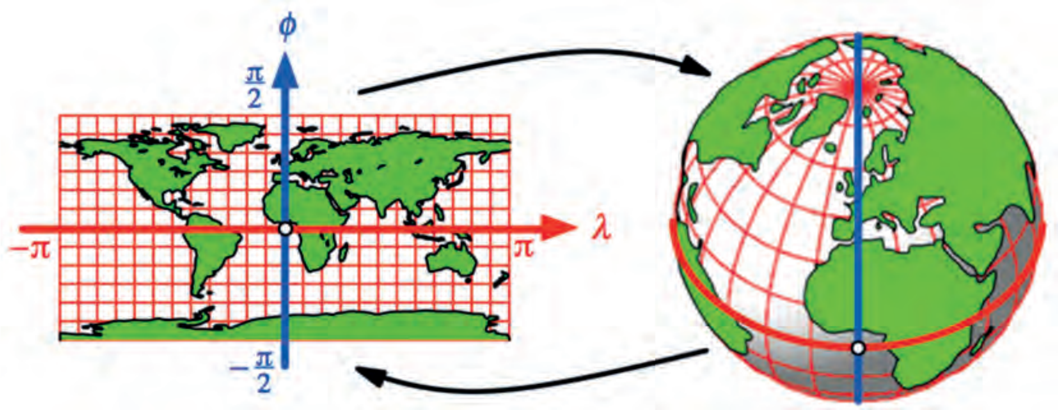


Abbildung 2. Plattkarte als Parameterbereich

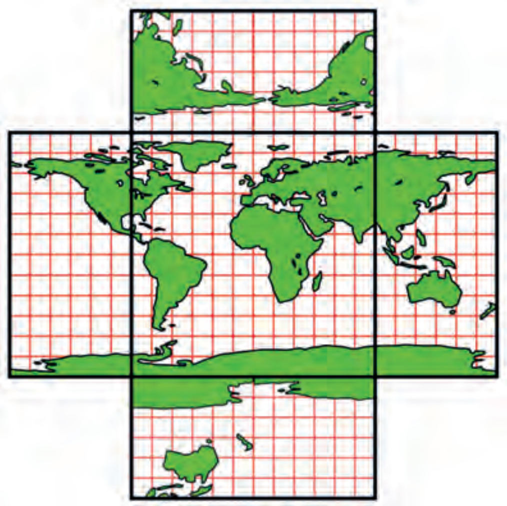


Abbildung 3. Abschneiden und Ansetzen

Meridiane über die Pole hinaus nach hinten verlängern.

Mit dem neuen Parameterrechteck ändert sich äußerlich gar nichts; der Computer plottet dieselbe Kugel.

Jetzt aber stellt sich die Frage: Wie sind die äußeren Teile der üblichen Plattkarte abzuschneiden und neu anzusetzen, damit sich die dem Hochformat entsprechende Karte ergibt (Abb. 3)?

Die vier Teile müssen *spiegelbildlich* angesetzt werden. Um das einzusehen, überlegen wir uns, wie sich die Meridiane auf der „Vorderseite“ (eurozentrisch gedacht) über die Pole hinaus auf die „Rückseite“ fortsetzen. Aus dem Meridian für 30°E wird der Meridian für 150°W. Die Meridiane überkreuzen sich in den Polen.

Wenn wir die Karte auf den Kopf stellen und den Pazifik studieren, stellen wir fest, dass sich Japan und Kalifornien je auf der „falschen“ Seite befinden. Spiegelbildliche Karten sind für uns ungewohnt; falsch sind sie aber nicht. Das Beispiel illustriert vielmehr, wie sehr wir uns an bestimmte Standards in der Kartendisposition gewöhnt haben.

3 Immer gerade aus

… so geh hübsch sittsam und lauf nicht vom Wege ab!

Eine *geodätische Linie* ist eine Kurve auf einer Oberfläche, auf der subjektiv immer geradeaus gefahren wird. Sie hat also keine Seitenkrümmung nach links oder rechts. Auf der Ebene sind die geodätischen Linien die Geraden. Wenn wir uns auf der Kugel subjektiv „gerade aus“ bewegen, bewegen wir uns auf einem Kreis, welcher denselben Radius und denselben Mittelpunkt hat wie die Kugel. Solche Kreise heißen *Großkreise* oder *Orthodromen*. Ihre Trägerebene geht durch den Kugelmittelpunkt.

Großkreise spielen eine wichtige Rolle in der sphärischen Geometrie; sie übernehmen die Rolle der Geraden. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugeloberfläche, gemessen auf der Kugeloberfläche (also nicht in einem geradlinigen Tunnel), ist ein Großkreisbogen.

Der Äquator und alle Meridiane sind Großkreise, nicht aber die übrigen Breitenkreise, welche so genannte *Kleinkreise* sind.

Wie sieht der kürzeste Bogen mit den Endpunkten $P(30°S, 60°W)$ und $Q(60°N, 60°E)$ in der Plattkarte aus?

Zunächst ist man versucht, in der Plattkarte eine Strecke von P nach Q einzuzeichnen (Abb. 4).

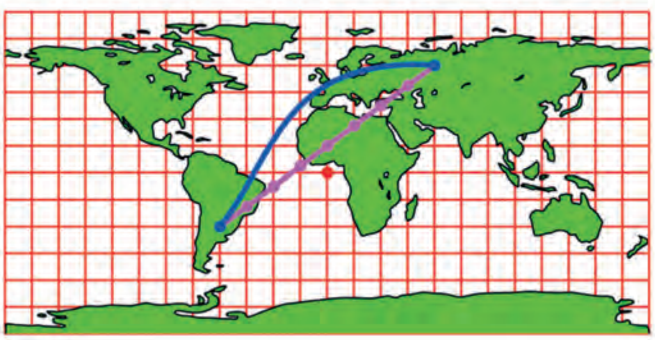
Das ist aber eine falsche Idee, wie durch Abzählen der entsprechenden Netzvierecke auf der Kugel plausibel wird. Tatsächlich geht der Großkreisbogen „oben durch“.

4 Großkreise als Geraden auf der Karte?

In der Plattkarte erscheinen nur die Meridiane und der Äquator gerade. Die übrigen Großkreise werden gekrümmt dargestellt.

Gibt es Karten, in denen alle Großkreise als Geraden erscheinen?

Anekdote: Bei der Planung der Eisenbahn St. Petersburg–Moskau (Nikolaibahn, gebaut



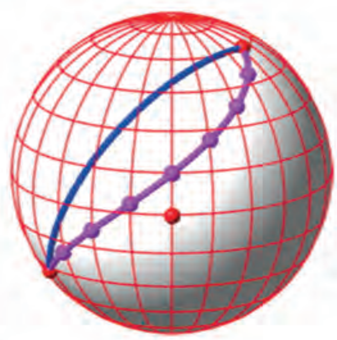


Abbildung 4. Welche Lösung ist die richtige?

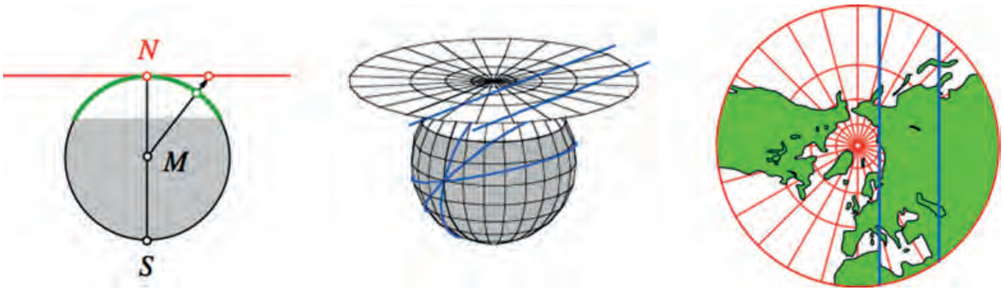


Abbildung 5. Tangentialebene im Nordpol

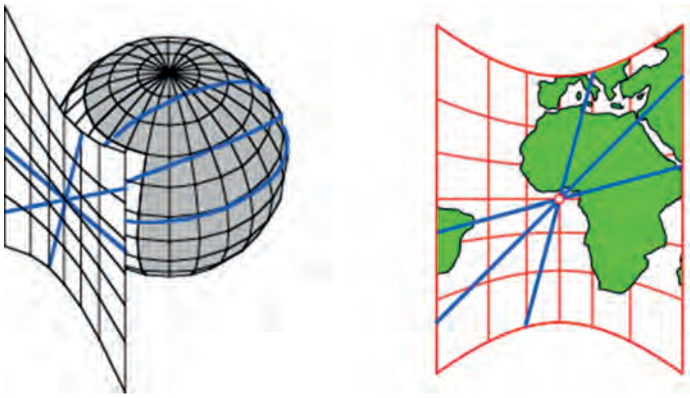


Abbildung 6. Tangentialebene im Äquator

1842–1851) wurde lange um die Linienführung gestritten. Zar Nikolaus I. (1825–1855) beendete den Streit, indem er auf einer Karte eine gerade Linie zwischen St. Petersburg und Moskau einzeichnete. Ist diese Linienführung optimal?

Die so genannte *gnomonische Projektion* ist eine Zentralprojektion vom Kugelmittelpunkt aus auf eine Tangentialebene. Da Großkreise in einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt liegen, ist ihre Projektion die Schnittgerade dieser Kreisebene mit der Projektionsebene. Wir erhalten also Karten, in denen jeder Großkreis gerade dargestellt wird.

Das griechische Wort *Gnomon* heißt eigentlich *Schattenzeiger*. Gemeint ist ein senkrechter Schattenstab auf einer Horizontalsonnenuhr.

In der Abbildung 5 wird auf die Tangentialebene im Nordpol projiziert. Es kann nur die nördliche Halbkugel abgebildet werden, das Bild des Äquators ist im Unendlichen. Praktisch brauchbar ist die Abbildung nur für eine Polkappe.

In der Abbildung 6 berührt die Projektionsebene in einem Äquatorpunkt.

Die Breitenkreise erscheinen in dieser Karte als Hyperbeln, da die Projektionsstrahlen durch Punkte auf einem Breitenkreis einen Kegel bilden, dessen Achse parallel zur Projektionsebene ist. Klassisches Kegelschnittbeispiel.

Durch Zentralprojektion vom Kugelmittelpunkt aus auf den Umwürfel der Kugel erhalten wir sechs gnomonische Karten. Die Website *Würfelwelten* gibt eine Bastelvorlage mit drei Streifen, aus denen ein Würfel-Globus (Abb. 7) geflochten werden kann.

Abbildung 7. Flechtwürfel als Globus

5 Maßstab eins zu eins

Gibt es eine Karte im Maßstab 1 : 1? — Die Antwort ist ein salomonisches Jein.

Wir arbeiten exemplarisch mit einer Plattkarte von 40 cm Breite und 20 cm Höhe (Abb. 8). Für die Erde nehmen wir eine Kugel mit dem Umfang 40 000 km an.

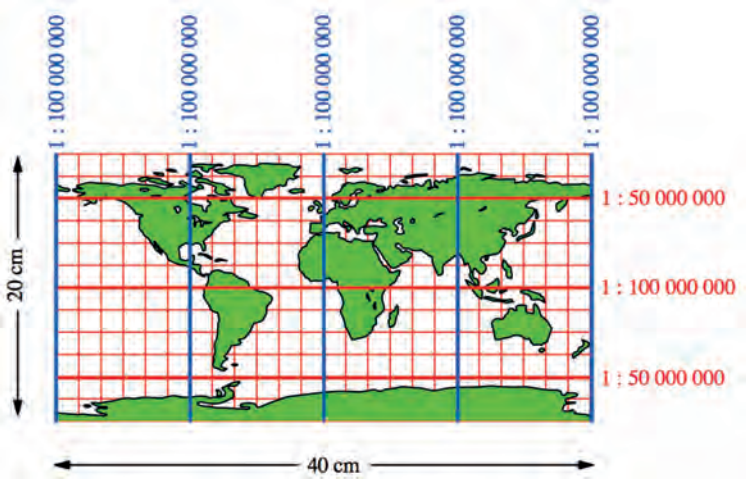


Abbildung 8. Maßstäbe

Am Äquator haben wir daher den Maßstab 1 : 100 000 000. Auf den Meridianen haben wir ebenfalls den Maßstab 1 : 100 000 000, aber das gilt nur in der Süd–Nord-Richtung. Weil die Breitenkreise kürzer sind als der Äquator, haben wir auf den Breitenkreisen in West–Ost-Richtung einen größeren Maßstab. Für 60°N ist der Breitenkreis wegen $\cos(60°) = 0.5$ genau halb so lang wie der Äquator, somit haben wir auf diesem Breitenkreis in der West–Ost-Richtung einen doppelt so großen Maßstab, also 1 : 50 000 000.

Gegen die Pole hin wird der Maßstab in West–Ost-Richtung immer größer und geht gegen Unendlich. Somit haben wir zwischen dem Äquator und den Polen je eine geografische Breite, auf welcher der Maßstab in West–Ost-Richtung genau 1 : 1 ist.

Das ist allerdings sehr nahe an den Polen. Da die Bilder der Breitenkreise in unserer Karte die Länge 40 cm haben, suchen wir also diejenigen Breitenkreise, die auch in Wirklichkeit den Umfang 40 cm und somit den Radius 6,37 cm haben. Zwischen diesen beiden Breitenkreisen und den Polen mit wächst der Maßstab in West–Ost-Richtung von 1 auf Unendlich.

In Süd–Nord-Richtung haben wir nach wie vor den Maßstab 1 : 100 000 000.

Auf der Plattkarte sind die Maßstäbe also richtungsabhängig. Zwischen den Extremen mit dem Maximum in West–Ost-Richtung und dem Minimum in Süd–Nord-Richtung variieren die Maßstäbe stetig.

Leider gibt es keine Karte, welche in allen Punkten und in allen Richtungen immer denselben Maßstab hat. Das heißt, es gibt keine verzerrungsfreie Karte. Dies war den Kartongrafen empirisch schon immer bekannt. Gauß gab mit seinem Theorema egregium den Beweis dazu.

6 Flächentreu und winkeltreu

Hingegen gibt es flächentreue Karten (equivalent) ohne Verzerrung der Flächenverhältnisse, und winkeltreue Karten (conformal) ohne Winkelverzerrungen. Die Plattkarte ist weder flächen- noch winkeltreu.

Die Abbildung 9 zeigt die flächentreue Karte von Archimedes-Lambert.

Das Auseinanderziehen in West–Ost-Richtung in Polnähe wird kompensiert durch ein Zusammenpressen in Süd–Nord-Richtung. Die Abstände zwischen den Breitenkreisen werden gegen die Pole hin verkürzt dargestellt.

Es gibt aber noch andere flächentreue Karten, zum Beispiel die flächentreue Karte von Mercator-Sanson. Die Idee dabei ist, von der Plattkarte ausgehend die zu großen Maßstäbe in der West-Ost-Richtung durch Einbrutzeln zu kompensieren

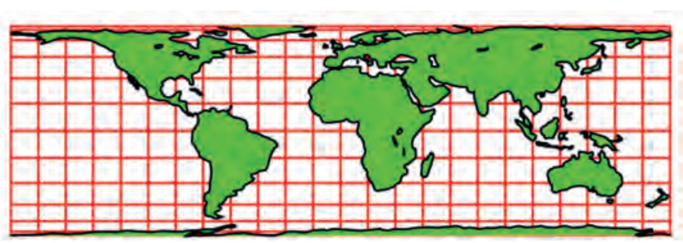


Abbildung 9. Flächentreue Karte von Archimedes-Lambert

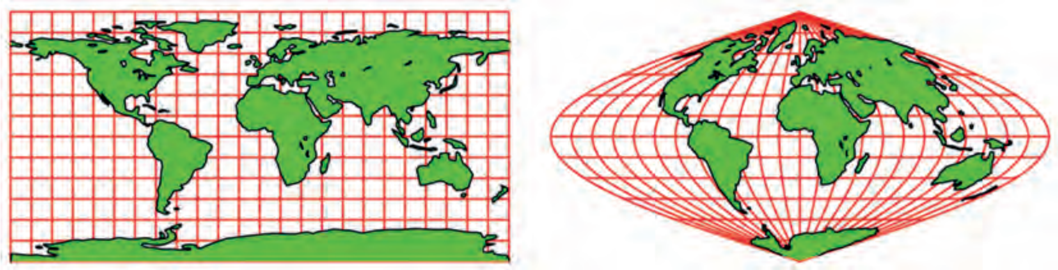


Abbildung 10. Einbrutzeln an den Polen. Karte von Mercator-Sanson

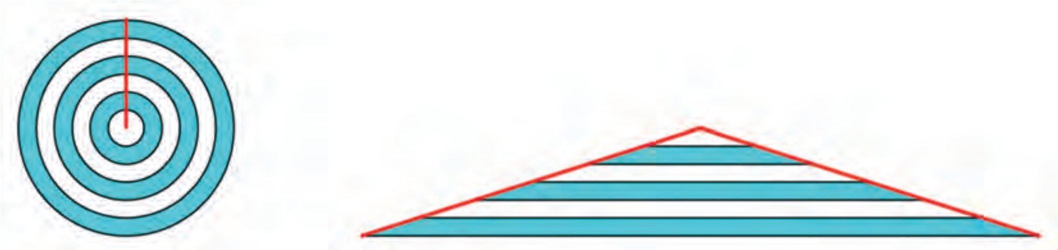


Abbildung 11. Kreis und Kreisfläche

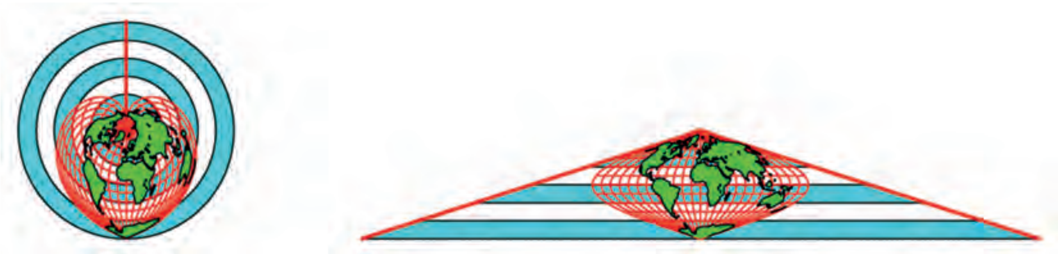


Abbildung 12. Einpassen der Mercator-Sanson-Karte

(Abb. 10). An den Polen wird sogar auf einen Punkt eingebrutzelt. Die Meridiane werden verbogen.

Diese flächentreue Karte von Mercator-Sanson führt zu einer Erinnerung an die Schule. Der Flächeninhalt eines Kreises wird bei bekanntem Kreisumfang $2r\pi$ gemäß Abbildung 11 hergeleitet (Prinzip von Cavalieri).

Wir denken uns einen Kreis aus 2d-Zwiebelschalen und schneiden von oben her bis in die Mitte ein. Dann fallen die Schalen auseinander und bilden ein flächengleiches gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie $2r\pi$ und der Höhe r. Daraus ergibt sich der Flächeninhalt $r^2\pi$.

Wir können die Mercator-Sanson-Karte bündig in das Dreieck einpassen (Abb. 12).

Nun wickeln wir das Dreieck wieder auf und erhalten in der Kreisscheibe eine neue flächentreue Karte, die Herzkarte von Stab-Werner (Abb. 13).

Und nun noch die wichtigste aller Karten, die winkeltreue Karte von Gerhard Mercator.

Abbildung 13. Flächentreue Karte von Stab-Werner

Mercator schuf die winkeltreue Seekarte für die aufkommende Hochseeschifffahrt (Abb. 14). Noch heute wird in der Hochseeschifffahrt fast ausschließlich die Mercator-Karte verwendet. Sie ist auch Grundlage von fast allen offiziellen staatlichen Karten.

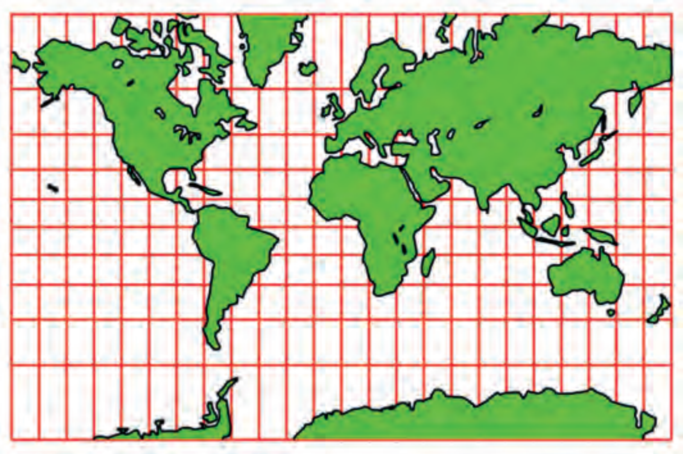


Abbildung 14. Winkeltreue Mercator-Karte

Die Abstände zwischen den Bildern der Breitenkreise werden gegen die Pole hin gespreizt dargestellt und zwar so dass die Maßstäbe in Süd-Nord-Richtung jeweils gleich groß werden wie in West-Ost-Richtung. Wir haben eine lokal isometrische Abbildung. Daher die Winkeltreue.

Dieses Spreizen hat allerdings zur Folge dass sich die Pole im Unendlichen befinden. Die reale Karte ist also oben und unten abgeschnitten, was bei der Darstellung von Grönland sofort auffällt.

7 Die schönste Kugel

Welches ist die schönste Kugel? Welches ist die „rundeste“ Kugel?

Zwei von drei Personen sprechen die mittlere der drei Kugeln (Abb. 15) als die schönste oder auch die „rundeste“ an. Die restlichen Personen bevorzugen die Kugel links.

Der geometrische Hintergrund der drei Kugeldarstellungen ist folgender.

In der Kugel links haben alle Netzvierecke die gleiche Maschenweite 15°. Sie sind überall gleich hoch. In Äquatornähe sind sie annähernd quadratisch, gegen die Pole hin werden sie immer schmaler.

In der mittleren Kugel sind alle Netzvierecke annähernd quadratisch. Dieses Netz ergibt sich, indem wir auf die Mercator-Karte ein Quadratnetz legen und auf die Kugel übertragen. Wegen der Winkeltreue bleiben die Quadratformen erhalten. Gegen die Pole hin haben wir unendlich viele Netzvierecke.

In der Kugel rechts haben alle Netzvierecke denselben Flächeninhalt. Gegen die Pole hin werden sie zwar schmaler, dafür entsprechend höher. Dieses Netz ergibt sich, indem wir auf die flächentreue Karte von Archimedes-Lambert ein Quadratnetz legen und auf die Kugel übertragen. — Bis jetzt habe ich einen einzigen Menschen angetroffen (Fachlehrer für bildnerisches Gestalten und Mathematik), dem diese Kugel am besten gefiel.

Websites: Würfelwelten (abgerufen 27. 1. 2014)

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Wuerfelwelten/Wuerfelwelten.htm

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Wuerfelwelten/Wuerfelwelten.pdf

Dr. Hans Walser, Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel, Schweiz, Email: hwalser@bluewin.ch

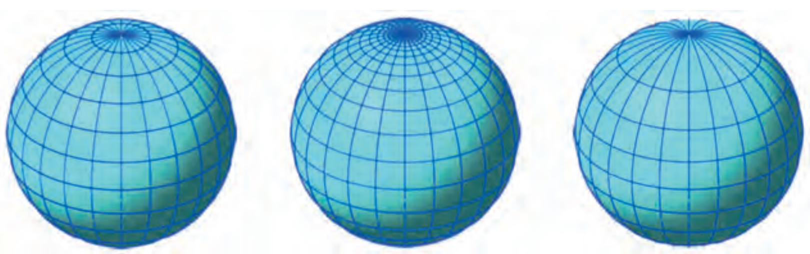


Abbildung 15. Drei Kugeln